

Ευκλείδεια Γεωμετρία

90/9/17

μοντέλο

Επιπέδομετρία ($\mathbb{R}^2$)

χρειάζονται δύο χωρία

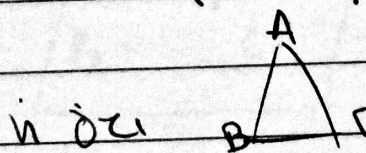
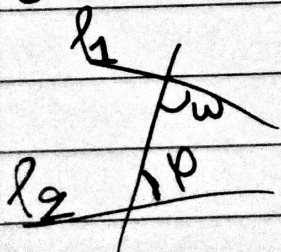
Στερεομετρία ($\mathbb{R}^3$) ή ματέλο

Αξιοματική Θεμελίωση

Αξιώματα του Ευκλείδη για την επιπέδομετρία

- 1) Ησπίσθω παντός σημείου ἐνὶ τῷ σημείῳ
εὐθείαν γραμμὴν ψαλῆεν.
(Απὸ καθὲ σημείῳ καὶ ὡς πρὸς καθὲ ἄλλο
σημεῖο διέρχεται μία εὐθεῖα.
- 2) καὶ πεπερασμένῃ εὐθείᾳ κατὰ τὸ συνεχὲς
ἐνὶ εὐθείᾳ ἐκβαλῆεν (καθὲ εὐθεῖα ἐπεντείνεται
στο ἀπείρο)
- 3) καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψωσθαι
με καθὲ κέντρῳ καὶ καθὲ γράφεται κύκλος
- 4) καὶ πᾶσαι τὰ ὀρθὰς γωνίας ἴσα ἀλλήλατα εἶναι.
(ὅλῃς οἱ ὀρθοὶ γωνίες εἶναι ἴσες μεταξὺ τῶν).
- 5) καὶ εἰς δύο εὐθεῖας ἐμπιπόμενα ἐντὸς
καὶ ἐνὶ ταῦτα μέρη γωνία ἐκβαλλόμενα ταῖς δύο
εὐθεῖαι ἐνὶ ἀπείρου συμπίνετε, ἐφ' ἧς μέρη εἴδω
οἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάττωσας

$\omega + \rho < 2 \text{ ὀρθοί} \Rightarrow l_1, l_2$ θα συναντηθῶν
τέμνουσιν



ἢ ὅτι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ ἢ ὅτι $\frac{A}{1} \frac{B}{1} \frac{\Gamma}{1}$

Επιπεδομετρία $\Rightarrow$ έχω αυτά
 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

Σημεία (x, y)
Ευθείες $\ell = \{(x, y) / ax + by + c = 0\}$
 $(a, b) \neq (0, 0)$

Αξιωματική Θεμελίωση (D. Hilbert)

Επιπεδομετρία. Αρχικες έννοιες είναι τα σημεία και οι ευθείες. Δεχόμαστε την ύπαρξη επί επιπέδου E^2 τα στοιχεία τα οποία καλούμε σημεία και μία ισότητα (κατηγορία) υποκατηγορίας, τα οποία καλούμε ευθεία.

Αξιώματα Επιπεδομετρίας κατά (D. Hilbert)

- Αξιώματα σχέσεων
- Αξιώματα Αιότητας
- Αξιώματα Ισότητας
- Αξιώματα Παραλληλότητας (από κάθε σημείο εκτός ευθ. μιας ευθ. παράγεται μια ευθ. παράλληλη)
- Αξιώματα Συνέχειας (τα σημεία κατά το ένα στο άλλο ευθ.)

Αξιώματα σχέσεων

- α) Για ~~οποιαδήποτε~~ δύο σημεία τυχόντα A, B υπάρχει ~~μία~~ μία και μόνο ευθεία που τα περιέχει
- β) Κάθε ευθεία περιέχει ≥ 2 ταλάνιστοι σημεία
- γ) Υπάρχουν ≥ 3 ταλάνιστοι μη συνευθειακά σημεία

Αξιωματική Θεμελίωση της Στερεομετρίας (Γεωμ. του χώρου)

Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο E^3 (ο καθολικός χώρος) $\neq \emptyset$ τα στοιχεία του οποίου καλούνται σημεία. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν

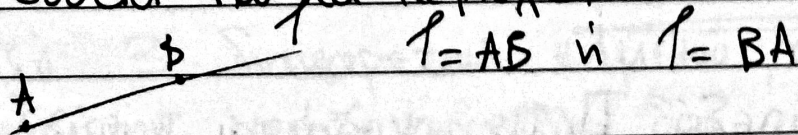
δύο κλάσεις υποσυνόλων του E^3 , οι $\mathcal{L}$ & $\mathcal{P}$
Τα στοιχεία της $\mathcal{L}$ καλούνται ευθείες.
Τα στοιχεία της $\mathcal{P}$ καλούνται επίπεδα.

Συμβολισμοί Σημεία: A, B, Γ, C, D
Ευθείες $\ell, \varepsilon, \zeta, \dots$ Επίπεδα $\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \dots$

- Αξιώματα σχέσεων
- Αξιώματα διάταξης
- Αξιώματα ισότητας (Γεωμετρική Ισοτιμία)
- Αξιώματα παραλληλότητας
- Αξιώματα συνέχειας-πληρωτότητας

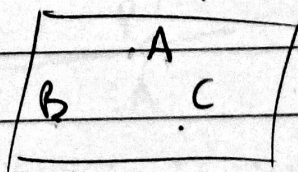
Αξιώματα σχέσεων

α) Για τυχόντα διακεκριμένα σημεία A, B υπάρχει μοναδική ευθεία που τα περιέχει

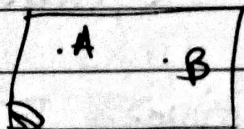


β) Για τρία μη συνευθειακά σημεία A, B, C υπάρχει μοναδικό επίπεδο που τα περιέχει

* (3 μη συνευθειακά σημεία καθορίζουν επίπεδο)

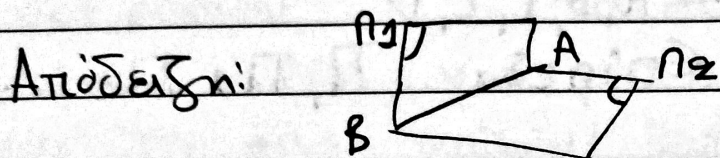


γ) Αν δύο σημεία A, B ανήκουν στο επίπεδο π , τότε η ευθεία AB περιέχεται (υποσύνολο) στο π



δ) Αν δύο επίπεδα π_1, π_2 έχουν ένα κοινό σημείο A τότε έχουν και δεύτερο κοινό σημείο $B \neq A$

Πρόταση: Αν $\pi_1 \cap \pi_2 \stackrel{\text{(τέμνεται επί)}}{=} \neq \emptyset$ τότε η $\pi_1 \cap \pi_2$ είναι ευθεία.



ε) Κάθε ευθεία περιέχει δύο ταλλάξιστα σημεία.

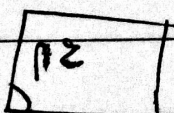
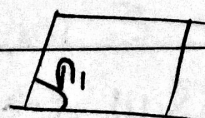
Κάθε επίπεδο περιέχει τρία ταλλάξιστα μη συνευθειακά σημεία.

Υπάρχουν 4 ταλλάξιστα μη (συννηρίεδα) (κανένα επίπεδο) σημεία.

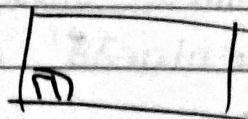
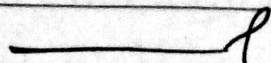
ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Δύο επίπεδα π_1, π_2 καλούνται παράλληλα αν $\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset$ (δηλ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο).

$\pi_1 \parallel \pi_2$



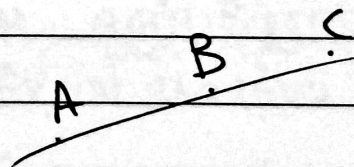
ii) Μία ευθεία ℓ κατέχεται παράλληλη προς επίπεδο π αν $\ell \cap \pi = \emptyset$ (καθένα κοινό σημείο) $\ell \parallel \pi$



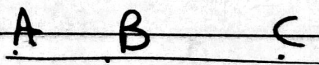
Πρόταση: Δύο τυχόντα επίπεδα είναι είτε παράλληλα είτε τέμνονται σε ευθεία.

Αξιώματα διατάξης (τρία σημεία B μεταξύ άλλων A και C)

α) Αν το B βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και C τότε τα σημεία αυτά είναι διαφορετικά ανά δύο και συνευθειακά και το B βρίσκεται μεταξύ των C και A

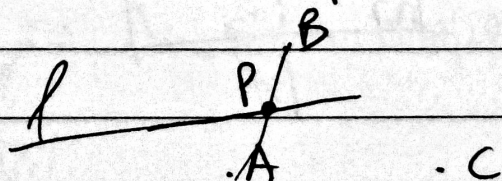


β) Για δύο σημεία διαφορετικά $A \neq B$ υπάρχει ένα τακτοποιημένο σημείο C τ.ω B να είναι μεταξύ A και C



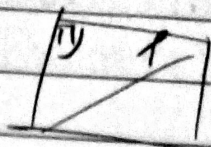
γ) Μεταξύ 3 διαφορετικών σημείων, το πολύ ένα βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο.

δ) (Pasch) A, B, C τρία διαφορετικά ανά δύο σημεία.

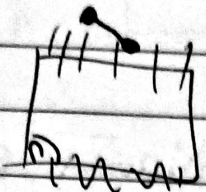


Αν έχω A, B, C ευθεία τμήμα AB στο P τότε τέμνει και ευθεία μεταξύ BC ή AC .

Γενικά: Τα αξιώματα διατάξης ορίζουν τις
 έννοιες ημιευθεία, ευθ. τμήμα.



Ημιεπίπεδα όταν η ευθεία χωρίσει
 το επίπεδο σε 2 μέρη.



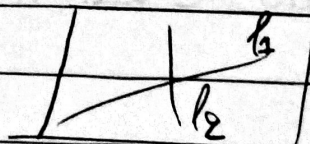
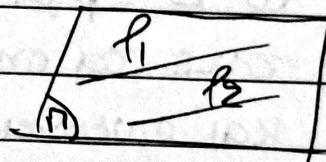
ημιχώρος

γωνίες (τομές ημιεπιπέδων)

Θεώρημα

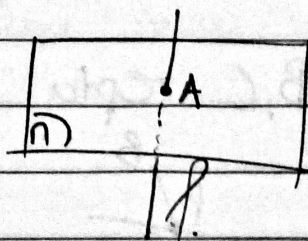
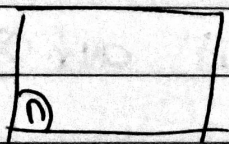
Σταθερές (Δύο ευθ) ευθεί διαγ.

i) Δύο ευθείες που περιέχονται
 σε επίπεδο είτε έχουν ένα κοινό κοινό σημείο
 ή κανένα



ii) Δύο επίπεδα είναι είτε παράλληλα είτε η
 τομή τους είναι ευθεία

iii) Έστω ευθεία l και επίπεδο Π , που δεν
 περιέχει την l . τότε είτε $l \cap \Pi = \emptyset$
 είτε $l \cap \Pi = \{A\}$ ένα κοινό
 σημείο



SOS

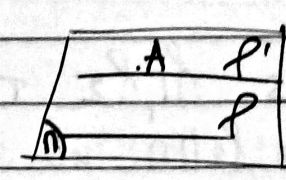
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 ονομάζονται

παράλληλες αν-ν είναι συνεπινέδρες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.



Λήμμα παραλληλίας: Έστω ευθεία ℓ που περιέχεται σε επίπεδο Π και σημείο $A \in \Pi$ αλλά $A \notin \ell$. Τότε υπάρχει μοναδική παράλληλη ευθεία $\ell' \parallel \ell$ με $A \in \ell'$ και ℓ' περιέχεται στο Π .



SOS

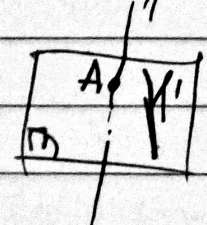
ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο ευθείες ονομάζονται αόμβωτες αν δεν είναι συνεπινέδρες και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Πρόταση: Έστω ℓ_1, ℓ_2 δύο διακεκλιμένες ευθείες. Τότε ισχύει ένα ακριβώς από τα ακόλουθα.

- i) ℓ_1, ℓ_2 τέμνεται σε σημείο A .
- ii) $\ell_1 \parallel \ell_2$
- iii) αόμβωτες

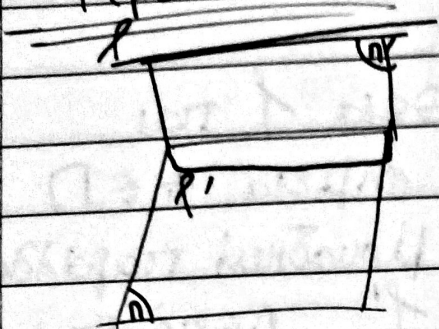
Πρόταση: Δίνεται επίπεδο ρ και ευθεία ℓ με $\ell \cap \rho = \{A\}$. Κάθε ευθεία ℓ' του ρ που δεν περιέχει το A είναι αόμβωτη προς την ℓ .



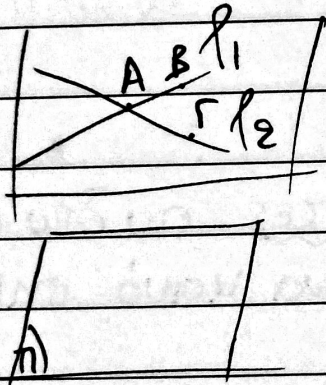
Πρόταση: Αν μία ευθεία l_2 είναι $\parallel l_2$
 ενός επιπέδου π
 τότε $l_2 \parallel \pi$



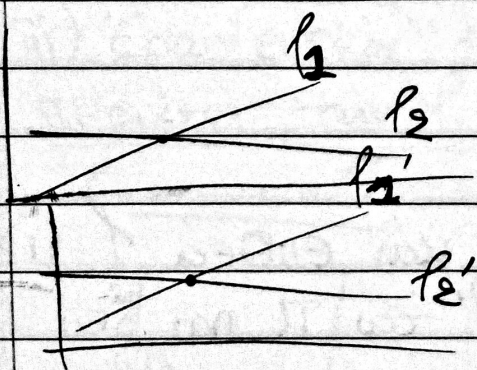
Πρόταση: Έστω $l \parallel \pi$. Αν π' περιέχει
 την l και τέμνει το π
 σε ευθεία l' , τότε $l \parallel l'$



Πρόταση: Οι ευθείες l_1, l_2 τέμνονται στο σημείο A
 Αν $l_2 \parallel \pi$ και $l_1 \parallel \pi$. Το επίπεδο
 που ορίζουν οι τεμνόμενες
 ευθείες l_1, l_2 είναι παράλληλο
 προς το π .



Πρόταση



$l_1 \parallel l_1', l_2 \parallel l_2'$

$l_1, l_2 = \{A\}$ και

$l_1' \cap l_2' = \{A'\}$. Τότε τα

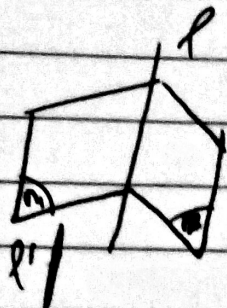
επίπεδα που ορίζουν

οι l_1, l_2 και οι l_1', l_2'

είναι μεταξύ τους παράλληλα

Πρόταση : Έστω επίπεδα π_1, π_2 με $\pi_1 \cap \pi_2 = \ell$

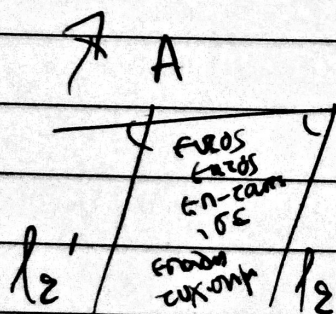
Αν $\ell' \parallel \pi_1$ και $\ell' \parallel \pi_2$, τότε $\ell' \parallel \ell$



Καθετότητα - Ορθογωνικά (ορθογωνισμός)

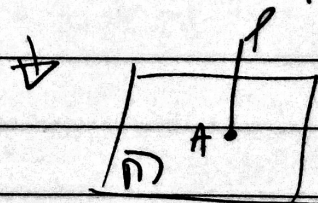
Ορισμός : i) Δύο ευθείες καλούνται κάθετες αν τέμνονται υπό ορθή γωνία.

ii) Δύο ασυμβάτες ευθείες ℓ_1, ℓ_2 καλούνται ορθογώνιες αν από τυχόν σημείο A της ℓ_2 φέρω $\ell_2' \parallel \ell_2$ με $A \in \ell_2'$ και $\ell_1 \perp \ell_2'$



iii) Μία ευθεία ℓ καλείται κάθετη στο επίπεδο π

αν το τέμνει σε σημείο A και



είναι κάθετη προς κάθε ευθεία του π που διέρχεται από το A .